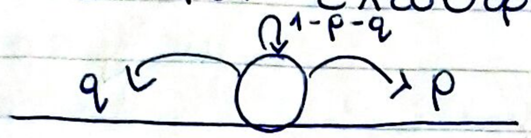
7° Μάθημα

25/11/2019

Οι ασκήσεις που θα λυθούν είναι από τα φυλλάδια (μικρό βιβλιαράκι) που μας έδωσε αλλά είναι διαθέσιμο και στην ιστοσελίδα του.

(44) Για τον Ελεύθερο Απλό Τυχαίο Περίπατο:



$p = \frac{1}{3}$, $q = 2/3$ Άρα δεν έχω αναπήδηση

2 είναι επαναληπτική ή παροδική και γιατί?

Υπόδειξη: $n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ (Τύπος Stirling)

- $f_{22}^{(n)} = ?$ ορισμός, δεν γίνεται.
- $\sum_{n=1} P_{22}^{(n)}$
- Θ. Foster

$P_{22}^{(n)} = P($ξεκινώντας από το 2, να ξαναγυρίσω στο 2 σε n βήματα$)$

$P_{22}^{(1)} = 0$ (γιατί δεν επιτρέπεται η αναπήδηση).

$P_{22}^{(2)} = P\left(2 \xrightarrow{p} 3 \xrightarrow{q} 2 ,\ 2 \xrightarrow{q} 1 \xrightarrow{p} 2 \right) = 2p\cdot q$

$P_{22}^{(3)} = 0$

$P_{22}^{(4)} = P($να γίνουν ακριβώς δύο βήματα μπροστά κ' δύο πίσω$) = \binom{4}{2} p^2 \cdot q^2$

$$P_{22}^{(n)} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ P(\text{από τα } 2k \text{ βήματα τα } k \text{ να είναι προς τα εμπρός κ' τα υπόλοιπα προς τα πίσω}) = \binom{2k}{k} p^k q^k, & n = 2k \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_{22}^{(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{22}^{(2k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!\,k!}\, p^k \cdot q^k$$

$k! \simeq k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(4pq)^k}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{\pi}}$$

ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ => ΠΑΡΟΔΙΚΗ

ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ => ΕΠΑΝ/ΚΗ

λύνω σαν να μην ξέρω $p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3}$

1η περ: $4pq < 1 \Rightarrow$ συγκλίνει

2η περ: $4pq = 1 \Rightarrow p\cdot q = \frac{1}{4}$ ενώ $p+q=1 \Rightarrow p=q=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Αποκλίνει $\Rightarrow$ επαν/κη.

3η περ: $4pq > 1$ άτοπο.

$4pq > (p+q)^2 \Rightarrow (p+q)^2 - 4pq < 0 \Rightarrow (p-q)^2 < 0$ ΑΤΟΠΟ.

4,7

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & \cdots & & \\ q & 0 & 0 & p & \cdots & \\ & \cdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$P_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \xrightarrow{q} 0 \xrightarrow{q} 0 \\ \xrightarrow[p]{} 1 \xrightarrow[q]{} 0 \end{array}\right) = q\cdot q + p\cdot q = q\overbrace{(q+p)}^{=1} = q.$$

$$P_{01}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \xrightarrow{q} 0 \xrightarrow{p} 1 \\ \xrightarrow[p]{} 1 \xrightarrow[0]{} 1 \end{array}\right) = q\cdot p.$$

$$P_{i0}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \xrightarrow{p} i+1 \xrightarrow{q} 0 \\ \xrightarrow[q]{} 0 \xrightarrow[q]{} 0 \end{array}\right) = p\cdot q + q^2 = q$$

$P_{02}^{(2)} = p^2$

$P_{ii}^{(2)} = q\cdot p$

$P_{i\,i+2}^{(2)} = p^2$

$f_{00}^{(*)} = ?$ δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = ?$

$f_{00}^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{ξεκινώντας από το 0 να επιστρέψω} \\ \text{στο 0 για πρώτη φορά στο n-οστό βήμα}\end{array}\right)$

$f_{00}^{(1)} = q, \quad f_{00}^{(2)} = P(0 \xrightarrow{} 1 \xrightarrow{} 0) = p \cdot q$

$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = p^2 \cdot q$

$f_{00}^{(n)} = p^{n-1} \cdot q$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$

$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} (p^{n-1} \cdot q) = q \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} \underline{\underline{n-1=k}} \; q \sum_{k=0}^{+\infty} p^k =$

$= q(1-p)^{-1} = q \cdot q^{-1} = 1$ Δίνεται $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$

$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = q \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = q(1-p)^{-2} = q \cdot q^{-2} = \frac{1}{q}$

(5) X_n

$\{0 = \text{βροχερή}, 1 = \text{όχι βροχερή}\}$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ & \| \\ & a \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \| & \\ b & \end{array} \end{array}$$

$\boxed{1^\eta}$ $\boxed{2^\eta}$ $\boxed{3^\eta}$ $\boxed{4^\eta}$ $\boxed{5^\eta}$ $\boxed{6^\eta}$

ΔΕΝ ΗΤΑΝ ΒΡΟΧΕΡΟΣ (1η) — ΝΑ ΜΗΝ ΕΙΝΑΙ ΒΡΟΧΕΡΟΣ (6η)

$P(X_0 = 0) = \frac{1}{2} = P(X_0 = 1)$ (επειδή λέει ότι είναι ισοπίθανα)

$P_{11}^{(5)} = ?$ Θα πρέπει να αποδ.

a. 1^η: $p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P = \ldots = p^{(0)} \cdot P^n$

2^η: $p^{(n)} = p^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{pmatrix}$

πλήρη αποδ. (ιδιοδιανύσματα + ιδιοτιμές) β. $P_1^{(5)} = P(X_5=1)$

1^{η} αποδ. $\quad P^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) X_n αριθμός επιτυχιών σε n ανεξ/τες δοκιμές Bernoulli με $P(E)=p$.

Πιθ. μετ/σης ενός βήματος $P_{ij}^{(n)}$.

Έστω σε κάποιο βήμα η σ.δ. βρίσκεται στην κατάσταση i.

Στο επόμενο βήμα που μπορώ να πάω?

$$i \to i+1,\quad i \to i,\quad i \not\to j,\ j \neq i, i+1.$$

$P_{i,i+1} = p$

$P_{i,i} = 1-p$

$P_{ij} = 0 \quad , j = i, i+1.$

$P_{ij}^{(n)} = P($από i επιτυχίες να πάω σε j επιτυχίες σε n βήματα$)$

$\overset{j \geq i}{=} P($να έχω $j-i$ επιτυχίες σε n δοκιμές$)$

$= \binom{n}{j-i} p^{j-i} \cdot (1-p)^{n-(j-i)} \quad , j-i = 0, 1, \ldots, n.$

άσκηση 8 εκτός ύλης

(29) $0 =$ τέλεια $\qquad P_{00} = 3/4$

$1 =$ ελαττωματικά. $\qquad P_{11} = 1/3$

άρα $P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ 0 & 3/4 & a = 1/4 \\ 1 & 2/3 = b & 1/3 \end{array}$

$\boxed{3^o}$ $\boxed{4^o}$ $\boxed{5^o}$ $\boxed{6^o}$ $\boxed{7^o}$ $\boxed{8^o}$ $\boxed{9^o}$ $\boxed{10^o}$ $\boxed{11^o}$ $\boxed{12^o}$

ΤΕΛΕΙΟ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ΤΕΛΕΙΟ

$P_{00}^{(9)}$ (Βλέπε Ασκ. 5. $p^{(n)} = p^{(0)} \cdot p^n$, $p^{(n)} = p^0$ [...]

$\Pi_0 = ?$ εφαρμόζω foster.

$$(x_0 \ x_1) = (x_0 \ x_1) \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \frac{3}{4} \cdot x_0 + \frac{2}{3} \cdot x_1$$

$$\frac{1}{4} x_0 = \frac{2}{3} x_1$$

$$x_0 = \frac{8}{3} x_1$$

γενική λύση: $\left(\frac{8}{3} x_1, x_1\right)$.

Για $x_1 = 3$, $\Pi = \left(\frac{8}{11}, \frac{3}{11}\right)$

1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ 4 $\quad$ 5

ΤΕΛ $\quad$ ΤΕΛ $\quad$ ΤΕΛ. $\quad$ ΤΕΛ. $\quad$ ΕΛ.

$$P(\text{fwr.}) = P_{00}^3 \cdot P_{01} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{ΤΕΛ}}$ - - - -

Έστω W η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των ψυγείων μέχρι το 1° ελ.

Δυνατές τιμές της W: $1, 2, 3, \ldots$

$P(W = k) = ?$

$P(W=1) = P(\text{ΤΕΛ} - \text{ΤΕΛ}) = P_{01} = a$.

$P(W=2) = P(\text{ΤΕΛ} \to \text{ΤΕΛ} \to \text{ΤΕΛ}) = P_{00} \cdot P_{01} = (1-a) \cdot a$.

$P(W=k) = (1-a)^{k-1} \cdot a$, $k = 1, 2, \ldots$

$$E(W)=\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-a)^{k-1}a = a\cdot\sum k\cdot(1-a)^{k-1} =$$

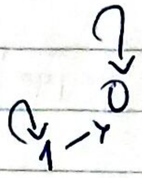
$$= a\cdot(1-(1-a))^{-2} = \frac{1}{a} \overset{a=\frac{1}{4}}{=\!=} 4 \qquad \sum n x^{n-1}=(1-x)^{-2}$$

ασκ 28 εκτός ύλης.

σε αυτό η κίνηση σταματάει

11 α.

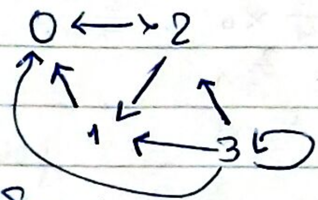
$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 3 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$



άρα 0 απορροφητική.
Έστω 1 επαν/κη.
$1\to0$ τότε θα έπρεπε
$0\to1$. ΑΤΟΠΟ.
Άρα 1 παροδική
Όμοια όλες οι άλλες

β.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

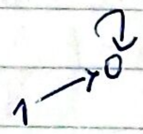


Έστω 3 επαν/κη $\left.\begin{matrix} 3\to0 \\ 0\not\to3 \end{matrix}\right\}$ 3 παροδική

$\{0,1,2\}$ κλ. κλειστ. επικ. καταστάσεων πεπ. πλήθος
άρα θετ. επαν.

γ.

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$



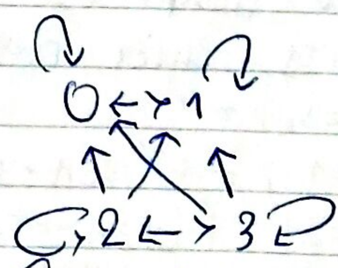
0 απορ/κη
1 παροδική

$2\to0 \quad 0\not\to2$

$3\to0 \quad 0\not\to3 \quad$ 2, 3 παροδικές

δ.

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$



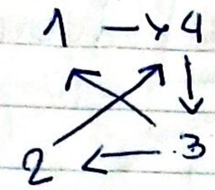
όλες επικοιν. μεταξύ τους, μη διαχ. Μ.Α. πεπ. πλ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ θετ. επαν/κες

(12)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α. ταξινόμηση καταστάσεων

β. Εφαρμόζεται το foster?



όλες επικοινωνούν μεταξύ τους, πεπ. πλη. => Θ.Ε.

1<->4, 1<->3, 1<->2, 2<->3, 3<->4, 2<->4

συχνό λάθος που γίνεται εδώ είναι να λέμε ότι εφαρμόζεται το foster. Δεν αρκεί μόνο να ξέρω ότι η Μ.Α. είναι Θ.Ε. Πρέπει να ξέρω ότι είναι και απεριοδική!

1 -> 4 -> 3 -> 1 -> 4 -> 3 -> 1 ...
-> 2 ...
1 -> 4 -> 3 -> 2 -> 4 -> 3 -> 1 ...
-> 2 ...

$P_{11}^{(3)} > 0$

$P_{11}^{(6)} > 0$.

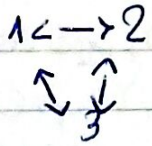
$d_1 = ΜΚΔ\{3, 6, 9, ...\} = 3 \neq 1$

(13) αποτελέσματα: 2 απορ, 1 κ' 3 θετ. επαν.

(16) 0,3 απορροφητικές 1,3 παροδικές

(17)

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & p & q \\ 2 & q & 0 & p \\ 3 & p & q & 0 \end{array}$$



Μη διαχ. Μ.Α. πεπ. πληθ. κατ. => θετ. επαν.

1 -> 2 -> 1 -> 2
-> 3
1 -> 2 -> 3 -> 1
-> 2
1 -> 3 -> 1
-> 2

$P_{11}^{(2)} > 0$

$P_{11}^{(3)} > 0$

$ΜΚΔ\{2, 3, ...\} = 1$.

$$(X_1 \ X_2 \ X_3) = (X_1 \ X_2 \ X_3)\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2 \cdot q + x_3 \cdot p$

$x_2 = x_1 p + x_3 q$

$x_3 = x_1 q + x_2 p$

$\boxed{X_1 = 1 = X_2 = X_3}$ προφανής λύση.

$p + q = 1$

$\Pi = CX = C(1 \ 1 \ 1) = \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}$

(18) Μη διαχ. Μ.Α, θετ. επαν + απεριοδική.

$\Pi = \left(\frac{1}{10} \ \ \frac{4}{10} \ \ \frac{3}{10} \ \ \frac{2}{10}\right)$

(20) α. foster: $\left(\frac{8}{27} \ \ \frac{10}{27} \ \ \frac{9}{27}\right)$

β. $3xp = \frac{27}{9}$

(21) $P_{AA} = 0.8$, $P_{AB} = 0.2$ } $P_{A\Gamma} = 0$

$P_{BB} = 0.6$

$P_{BA} = \ B\Gamma = 0.2$

$P_{\Gamma\Gamma} = 1$

1η 2η 3η 4η

A ... A

Ποια η πιθ. κάποιος που εκλέγεται την 4η χρονιά να έχει ψηφίσει την Α δεδομένου ότι την ψήφισε τη 1η φορά?

$P_{AA}^{(3)} = P\Big(A$ — A — A — A

A — A — B — A

A — B — A — A

A — B — B — A

A — B — Γ ≠ A $\Big)$

Το διάγραμμα είναι σωστό αλλά δεν θα δώσει όλες τις μονάδες διότι δεν βολεύει όταν έχω πχ 38 βήματα.

$$P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$p^{(n)}=p^{(n-1)}\cdot P=\ldots=p^{(0)}\cdot P^n$

$$p^{(n)}=p^{(0)}\cdot\begin{bmatrix}P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & P_{02}^{(n)}\\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)}\\ P_{20}^{(n)} & P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)}\end{bmatrix}$$

$P(X_n=0)=P(X_{n-1}=0)\cdot P_{00}+P(X_{n-1}=1)\cdot P_{10}+P(X_{n-1}=2)P_{20}$

ή $P(X_n=0)=p_0^{(n-1)}P_{00}+p_1^{(n-1)}P_{10}+p_2^{(n-1)}P_{20}$

$p_1^{(n)}=p_0^{(n-1)}P_{01}+p_1^{(n-1)}P_{11}+p_2^{(n-1)}\cdot P_{21}$

Ετσι θα βρω την $P_{11}^{(37)}$

ασκ 22 εκτος ύλης

(23) p(να βρέχει ή χιονίζει) $=p$

X_n: αριθμός σκαφών στην αρχή της n-οστής διαδρομ.

Ειναι στοχ. διαδ. σε διακριτό χρόνο (αρχή n-οστής) με διακριτό χώρο καταστάσεων $E=\{0,1,2,3\}$

	ΠΑΡΕΛΘΟΝ	ΠΑΡΟΝ	ΜΕΛΛΟΝ
ΣΑΒ	ΚΥΡΙΑΚ	ΔΕΥΤ	ΤΡΙΤΗ
ΣΠ-ΓΡ	ΣΠ-ΓΡ	ΣΠ-ΓΡ	ΣΠ-
		2	1 ή 2

Την Τρίτη μπορώ να έχω σίγουρα 1 ή 2 επειδή πήρα καποιο από το ΓΡ στο σπίτι.

Αρα το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν

$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1-p & p\\ 2 & 0 & 1-p & p & 0\\ 3 & 1-p & p & 0 & 0\end{array}$$

Μ.Α. μη διαχ. πεπ. πλη. κατ. $\Rightarrow$ θετ. επαν

$$\Pi=\left(\frac{1-p}{4-p},\ \frac{1}{4-p},\ \frac{1}{4-p},\ \frac{1}{4-p}\right)$$

$\Pi_0=\frac{1-p}{4-p}$, $\frac{1-p}{4-p}\cdot p$ η π.θ. να βρέχεται